**2C**

**УДК 519.85**

***В.В. Сёмкин, А.М. Чугай***
Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАНУ, Украина
Украина, 61046, г. Харьков, ул. Дм. Пожарского, 2/10

# Поиск локальных экстремумов в задаче плотной упаковки неориентированных сфероконусов

***V.V. Semkin, A.M. Chugay***
*Institute for Mechanical Engineering Problems, National Academy of Sciences of Ukraine*
*Ukraine, 61046, Kharkov, Pozharsky St. 2/10*

# *Searching for Local Extrema of Non-Oriented Spherocones Dense Packing Problem*

***В.В. Сьомкін, А.М.Чугай***
Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАНУ, Україна
Україна, 61046, м. Харків, вул. Дм. Пожарського, 2/10

# Пошук локальних екстремумів у задачі щільного пакування неорієнтованих сфероконусів

На основании квази Ф-функций построена математическая модель задачи плотной упаковки неориентированных сфероконусов в кубоиде минимальной высоты. Построенная модель позволила применить для поиска локальных экстремумов метод внутренней точки на последовательности подобластей области допустимых решений. Предложен метод построения разнообразных начальных точек. Представлен численный пример.
**Ключевые слова:** квази Ф-функция, задача упаковки, сфероконус.

On the ground of quasi Ф-functions a mathematical model of non-oriented spherocones dense packing problem into a cuboid of the minimal height is built. The model allows us to apply the interior point method to search local extrema on a sequence of feasible subregions. An algorithm for construction different starting points is suggested. A numerical example is given.
**Key words:** quasi Ф-function, packing problem, spherocone.

На основі квазі Ф-функцій побудовано математичну модель задачі щільного пакування неорієнтованих сфероконусів у кубоїді мінімальної висоти. Побудована модель дозволила застосувати для пошуку локальних екстремумів метод внутрішньої точки на послідовності підобластей області припустимих розв’язків. Запропоновано метод побудови різноманітних початкових точок. Наведено числовий приклад.
**Ключові слова:** квазі Ф-функція, упаковка, сфероконус.

Вопросы моделирования плотного размещения трехмерных объектов активно исследуются различными авторами во всем мире. Задачи, в которых приходится решать эти вопросы, широко используются в науке и промышленности [1-3]. Следует отметить, что на сегодняшний день разработано большое количество методов моделирования упаковок сфер. Однако в реальности очень часто приходится сталкиваться с задачами, в которых необходимо рассматривать трехмерные объекты произвольных пространственных форм. Моделирование плотного размещения таких объектов является ресурсоемкой задачей. В существующих работах по упаковке трехмерных объектов, форма которых отличается от сферической, рассматриваются только при-

ближенные подходы, не позволяющие провести адекватное моделирование задачи и получить хорошее решение. Один из распространенных подходов к решению задачи упаковки трехмерных объектов заключается в представлении объектов набором сфер и рассмотрении условий не пересечений этих сфер. Например, в работе [2] с помощью такого подхода решается задача упаковки цилиндров, сфероцилиндров, конусов, сфер и кубов. Еще один распространенный подход сводится к использованию простой «идеализированной» математической модели дискретизации объектов с помощью трехмерной сетки, ячейки которой являются кубоидами [3]. В работе [4] предлагается использовать сфорополиэдры для представления различных трехмерных объектов. Используемый авторами алгоритм позволяет получать размещение большого числа объектов (>100) в задачах. Все эти подходы направлены на получение быстрого, оценочного размещения большого количества объектов.

**Целью данного исследования** является построение адекватной математической модели задачи плотного размещения сфероконусов и разработка метода поиска экстремумов данной задачи.

Сфероконусом $SK$ называется выпуклый геометрический объект, который образован усеченным конусом $K$ высоты $2h$ с радиусами верхнего и нижнего оснований $r_1$ и $r_2$ ($r_1 \geq r_2$) соответственно, верхним сферическим сегментом $G_1$ с высотой и радиусом основания, равными $w_1$ и $r_1$ соответственно, и нижним сферическим сегментом $G_2$, высота и радиус основания которого равны $w_2$ и $r_2$ соответственно. Условия, обеспечивающие выпуклость объекта имеют вид:

$$w_1 \leq r_1 \frac{2h}{\sqrt{(r_1-r_2)^2+4h^2}-(r_1-r_2)}, \quad w_2 \leq r_2 \frac{\sqrt{(r_1-r_2)^2+4h^2}-(r_1-r_2)}{2h}.$$

Обозначим через $\mu = (r_1, r_2, w_1, w_2, h)$ вектор метрических характеристик сфероконуса. Сфероконус является «базовым» объектом, изменяя метрические характеристики которого, можно получить следующие трехмерные объекты: сфероцилиндр ($\mu = (r_1, r_2, w_1, w_2, h)$, $r_1 = r_2$); усеченный конус ($\mu = (r_1, r_2, 0, 0, h)$); цилиндр ($\mu = (r_1, r_2, 0, 0, h)$, $r_1 = r_2$); конус ($\mu = (r_1, 0, 0, 0, h)$); сферические сегменты ($\mu = (r_1, 0, w_1, 0, 0)$ или $\mu = (0, r_2, 0, w_2, 0)$); сферический диск ($\mu = (r_1, r_2, w_1, w_2, 0)$, $r_1 = r_2$).

Пусть задано множество сфероконусов $O_i \in R^3$, $i \in I_n = \{1, \ldots, n\}$.

Сфероконусы $O_i, i \in I_{n_1}$ допускают аффинные преобразования трансляции на вектор $v_i = (x_i, y_i, z_i) \in R^3$ и поворота на углы $\theta_i = (\alpha_i, \beta_i) \in R^2$ вокруг осей координат $Ox'$ и $O'y$ соответственно. Вектор движения объекта $O_i, i \in I_n$ обозначим $u_i = (v_i, \theta_i)$. Тогда, вектор $u = (u_1, \ldots, u_n) \in R^{\omega_u}$, $\omega_u = 5n$, определяет положение всех объектов в трёхмерном пространстве.

Пусть плоскость $\Gamma(X,Y)$ определяется уравнением $\Lambda(X,Y) = \langle N(Y), X \rangle + d = 0$, где $Y = (\chi, \delta, d) \in R^3$ и $N(Y) = (\sin\chi, -\sin\delta\cos\chi, \cos\delta\cos\chi)$.

Плоскость $\Gamma(X,Y)$ делит пространство $R^3$ на два полупространства

$$\Pi^- = \left\{X \in R^3 : \Lambda(X,Y) \leq 0\right\} \text{ и } \Pi^+ = \left\{X \in R^3 : \Lambda(X,Y) \geq 0\right\}.$$

Область размещения $P$ (контейнер) описывается следующим образом:

$$P=\left\{X=(x,y,z)\in R^3:-a\le x\le a,-b\le y\le b,\ h_1\le z\le h_2\right\}.$$

Контейнер $P$ высоты $h=h_2-h_1$ обозначим $P(h)$. Тогда вектора $Y_t^0=\left(\chi_t^0,\delta_t^0,d_t^0\right)\in R^3$, $t\in\{1,\ldots,6\}$, порождающие плоскости, в которых лежат грани контейнера $P(h)$, имеют вид: $Y_1^0=\left(-\frac{\pi}{2},0,a\right)$, $Y_2^0=\left(\frac{\pi}{2},0,a\right)$, $Y_3^0=\left(0,-\frac{\pi}{2},b\right)$, $Y_4^0=\left(0,\frac{\pi}{2},b\right)$, $Y_5^0=(0,0,h_1)$, $Y_6^0=(\pi,0,h_2)$.

*Задача.* Найти вектор $\hat{u}\in R^{\omega_u}$, такой, что объекты $O_i$, $i\in I_n$, содержатся в контейнере $P(h)$ и его высота $h$ достигает минимума.

Для построения математической модели поставленной задачи в работе используется метод Ф-функций [5]. Эта математическая модель может быть представлена в виде:

$$h^*=\min h, X\in W\subset R^{\omega_u+\omega_Y+2}, \tag{1}$$

где

$$W=\left\{X=(u,Y,h_1,h_2)\subset R^{\omega_u+\omega_Y+2}:\Phi_{ij}^q\left(u_i,u_j,Y_{i,j}\right)\ge 0, i,j\in I_n, i<j,\right.$$
$$\left.\Phi_{it}\left(u_i,Y_t^0\right)\ge 0, i\in I_n, t\in\{1,2,\ldots,6\}\right\}, \tag{2}$$
$$\Phi_{ij}^q\left(u_i,u_j,Y_{i,j}\right)=\min\left\{\Phi\left(u_i,Y_{i,j}\right),\Phi\left(u_j,\overline{Y}_{i,j}\right)\right\},\quad \Phi\left(u_s,\widetilde{Y}\right)=\min_{l=1,2}F_l\left(u_s,\widetilde{Y}\right),$$
$$F_1\left(u_s,\widetilde{Y}\right)=\max\left\{\min_{l=1,2}\phi_l\left(u_s,\widetilde{Y}\right),\phi_3\left(u_s,\widetilde{Y}\right)\right\},\ F_2\left(u_s,k_s,\widetilde{Y}\right)=\max\left\{\min_{l=4,5}\phi_l\left(u_s,\widetilde{Y}\right),\phi_6\left(u_s,\widetilde{Y}\right)\right\}$$
$$\varphi_1\left(u_s,\widetilde{Y}\right)=\Lambda(v_s,\widetilde{Y})+h_s\left\langle R_z(\theta_s),N\left(\widetilde{Y}\right)\right\rangle-r_{s1}\sqrt{1-\left\langle R_z(\theta_s),N\left(\widetilde{Y}\right)\right\rangle^2},$$
$$\varphi_2\left(u_s,\widetilde{Y}\right)=\Lambda(v_s,\widetilde{Y})+\left(h_s+\frac{2r_{s1}^2w_{s1}}{r_{s1}^2-w_{s1}^2}\right)\left\langle R_z(\theta_s),N\left(\widetilde{Y}\right)\right\rangle,$$
$$\varphi_3\left(u_s,\widetilde{Y}\right)=\Lambda(v_s,\widetilde{Y})+\left(h_s-\frac{r_{s1}^2-w_{s1}^2}{2w_{s1}}\right)\left\langle R_z(\theta_s),N\left(\widetilde{Y}\right)\right\rangle-\frac{r_{s1}^2+w_{s1}^2}{2w_{s1}},$$
$$\varphi_4\left(u_s,\widetilde{Y}\right)=\Lambda(v_s,\widetilde{Y})-h_s\left\langle R_z(\theta_s),N\left(\widetilde{Y}\right)\right\rangle-r_{s2}\sqrt{1-\left\langle R_z(\theta_s),N\left(\widetilde{Y}\right)\right\rangle^2},$$
$$\varphi_5\left(u_s,\widetilde{Y}\right)=\Lambda(v_s,\widetilde{Y})-\left(h_s+\frac{2r_{s2}^2w_{s2}}{r_{s2}^2-w_{s2}^2}\right)\left\langle R_z(\theta_s),N\left(\widetilde{Y}\right)\right\rangle,$$
$$\varphi_6\left(u_s,\widetilde{Y}\right)=\Lambda(v_s,\widetilde{Y})-\left(h_s-\frac{r_{s2}^2-w_{s2}^2}{2w_{s2}}\right)\left\langle R_z(\theta_s),N\left(\widetilde{Y}\right)\right\rangle-\frac{r_{s2}^2+w_{s2}^2}{2w_{s2}},$$
$$R_z(\theta_s)=(\sin\beta_s,-\sin\alpha_s\cos\beta_s,\cos\alpha_s\cos\beta_s),$$
$$Y_{i,j}=\left(\chi_{i,j},\delta_{i,j},d_{i,j}\right),\overline{Y}_{i,j}=\left(\pi+\chi_{i,j},\delta_{i,j},-d_{i,j}\right),\omega_Y=3\frac{n(n-1)}{2}.$$

Функция $\Phi_{it}\left(u_i,Y_t^0\right)$ является Ф-функцией объекта $O_i, i\in I_n$ и полупространства $\Pi^-$, отделяемого плоскостью $\Gamma\left(X,Y_t^0\right)$.

Использование метода Ф-функций позволило записать условия взаимного непересечения объектов в виде набора систем неравенств, левые части которых являются бесконечно дифференцируемыми функциями.

Задача (1), (2) является *NP*-трудной задачей. Для поиска приближения к глобальному экстремуму такой задачи необходимо разработать метод получения локальных экстремумов.

Поскольку математическая модель (1), (2) поставленной задачи построена в виде классической задачи нелинейного программирования, то для ее решения могут быть применены различные модификации методов нелинейной оптимизации (например, метод возможных направлений, метод внутренней точки и др.).

Однако для применения численных методов нелинейной оптимизации необходимо иметь допустимую начальную точку. Среди методов, которые применяются для построения начальных точек, в задачах размещения объектов в основном используются различные модификации «жадных» алгоритмов. Применение «жадных» алгоритмов в рассматриваемой задаче представляет большую сложность.

Поэтому, для получения начальных точек в работе предлагается метод, который предполагает, что все метрические характеристики объектов являются переменными и принимают значения от некоторого минимального значения до изначально заданного.

Рассмотрим предлагаемый метод решения. Для каждого объекта введём величину $S_i^0$, равную сумме его метрических характеристик. Таким образом, $S_i^0 = r_{i1}^0 + r_{i2}^0 + h_i^0 + w_{i1}^0 + w_{i2}^0$, $i \in I_n$. Также введём переменные величины $k_i$ – коэффициенты гомотетии объектов $O_i$, $i \in I_n$ и вектор $\kappa = (k_1, \ldots, k_n) \in R^n$.

Зададим высоту $h = h^0$ так, что объекты гарантированно размещаются в области $P(h^0)$. Введём векторы $u' = (u_1, \ldots, u_n) \in R^{\omega_u}$, $\kappa_\varepsilon = (\varepsilon, \ldots, \varepsilon) \in R^n$, $Y' = (Y'_{1,2}, Y'_{1,3}, Y'_{2,3}, \ldots, Y'_{n-1,n}) \in R^{\omega_Y}$ и сформируем точку $X' = (u', \kappa_\varepsilon, Y')$, где вектор $u'$ случайно генерируется таким образом, что $u'_i \in P(h^0), i \in I_n$, а вектор $Y'_{i,j}, i, j \in I_n, i < j$ порождает плоскость, перпендикулярную отрезку, соединяющему полюсы объектов $O_i$ и $O_j$, $i, j \in I_n, i < j$, и проходящую через его середину.

Сформулируем следующую задачу:

$$\max \sum_{i=1}^{n} S_i^0 k_i, X \in \Omega \subset R^{\omega_u + \omega_Y + n}, \tag{3}$$

$$\Omega = \{X = (u, \kappa, Y) \subset R^{\omega_u + \omega_Y + n} : \Phi_{ij}^q(u_i, u_j, k_i, k_j, Y_{i,j}) \geq 0, i, j \in I_n, i < j,$$
$$\Phi_{it}(u_i, k_i, Y_t^0) \geq 0, 0 \leq k_i \leq 1, i \in I_n, t \in \{1, 2, \ldots, 6\}\} \tag{4}$$

Заметим, что существует такое $\varepsilon \in (0,1]$, что $X' = (u', \kappa_\varepsilon, Y') \in \Omega$. Решим данную задачу, взяв точку $X' \in \Omega$ в качестве стартовой. Целью решения данной задачи является нахождение такого размещения объектов в области $P(h)$, при котором все метрические характеристики объектов достигают своих заданных значений, то есть $k_i = 1$, $i \in I_n$. В случае, если в результате решения задачи (3), (4) будет получена точка $X^* = (u^*, \kappa_1, Y^*)$ глобального максимума, то точка $(u^*, Y^*)$ берется в качестве начальной точки для поиска локального минимума задачи (1), (2).

Для поиска локальных максимумов задачи (1), (2) и локальных минимумов задачи (3), (4) использовался метод последовательного улучшения значения функции цели на последовательности подобластей, образуемых наборами систем неравенств из квази Ф-функций для каждой пары сфероконусов. При этом поиск локального

экстремума на каждой подобласти осуществлялся с использованием библиотеки IPOPT [6]. В данной библиотеке реализованы алгоритмы внутренней точки, которые для поиска вектора движения используют матрицу Гессе левой части системы ограничений, описывающей область допустимых решений.

Приведем численный пример. Положим количество объектов $n = 10$, среди которых 4 «базовых» сфероконуса, 3 сфероцилиндра и 3 цилиндра. Размеры контейнера установим $a = 25, b = 15$. Метрические характеристики и координаты точки локального минимума $\hat{u} \in W$ приведены в табл. 1. Значение локального минимума: $\hat{h} = 63,126$.

Таблица 1 – Метрические характеристики и координаты точки локального минимума

| $i$ | $h_i^0$ | $r_{i1}^0$ | $r_{i2}^0$ | $w_{i1}^0$ | $w_{i2}^0$ | $\hat{x}_i$ | $\hat{y}_i$ | $\hat{z}_i$ | $\hat{\alpha}_i$ | $\hat{\beta}_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 8,389 | 9,863 | 5,475 | 9,229 | 2,535 | 11,17 | 1,268 | 3,222 | 4,996 | 2,606 |
| 2 | 8,238 | 9,694 | 4,267 | 9,089 | 0,886 | -8,54 | -8,37 | 10,63 | -0,74 | 5,193 |
| 3 | 6,14 | 9,349 | 7,442 | 8,27 | 4,162 | -14,7 | 6,147 | -22,7 | 0,785 | 1,463 |
| 4 | 7,452 | 9,988 | 6,455 | 8,743 | 2,705 | 16,36 | 7 | -12,7 | 6,035 | 3,495 |
| 5 | 11 | 6,093 | 6,093 | 4,119 | 4,535 | 4,369 | -8,91 | -25,5 | 5,29 | -1,57 |
| 6 | 11,27 | 10,35 | 10,35 | 6,894 | 8,395 | 6,616 | 0,228 | 21,21 | 1,571 | 4,175 |
| 7 | 12 | 9,192 | 9,192 | 2,949 | 6,532 | -10,4 | 0,293 | -3,86 | 2,279 | 2,555 |
| 8 | 4,397 | 8,888 | 8,888 | 0 | 0 | 1,511 | -3,08 | -10,8 | 3,045 | 0,827 |
| 9 | 2,553 | 6,375 | 6,375 | 0 | 0 | -14,9 | -6,93 | 28,67 | 3,146 | 3,138 |
| 10 | 3,251 | 6,281 | 6,281 | 0 | 0 | 21,57 | 8,493 | 10,94 | 5,25 | 4,709 |

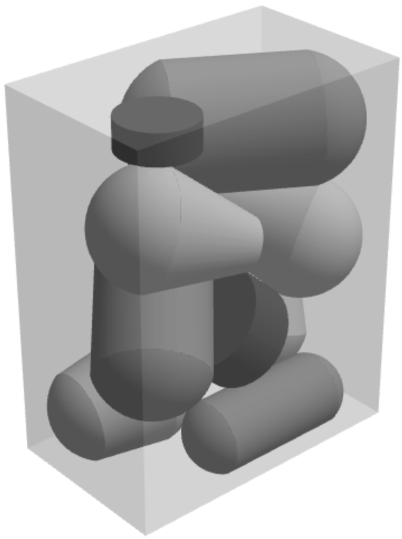


Рисунок 1 – Локальный минимум

В работе благодаря использованию аппарата квази Ф-функций построена математическая модель задачи плотной упаковки сфероконусов в кубоиде. Построенная модель позволила применить для поиска локальных экстремумов метод внутренней точки.

## Список литературы

1. Williams S.R. Random Packings of Spheres and Spherocylinders Simulated by Mechanical Contraction / S.R. Williams, A.P. Philipse // Phys. Rev. E. – 2003. – № 67. – P. 051301.
2. LI ShuiXiang. Maximum packing densities of basic 3D objects/ LI ShuiXiang, ZHAO Jian, LU Peng, XIE Yu // Chinese scince Bulletin. – 2010. – Vol.55.– №2.– P. 114-119.
3. A.C.J. de Korte. Random packing of digitized particles / A.C.J. de Korte, H.J.H. Brouwers // Powder Technology. – 2013. – № 233. – P. 319-324.
4. Мизгулин В.В. Моделирование плотных материалов методом упаковки сферополиэдров / Мизгулин В.В., Кадушников Р.М., Алиевский Д.М., Алиевский В.М. // Компьютерные исследования и моделирование. – 2012. – Т. 4, № 4. – С. 757-766.
5. Stoyan Yu.G. Ф-function and its basic properties/ Yu.G. Stoyan // Доп. НАН України. – 2001. – № 8. – С. 112-117.

## References

1. Williams S.R. Random Packings of Spheres and Spherocylinders Simulated by Mechanical Contraction / S.R.Williams, A.P.Philipse // Phys. Rev. E. – 2003. – № 67. – P. 051301.
2. LI ShuiXiang. Maximum packing densities of basic 3D objects/ LI ShuiXiang, ZHAO Jian, LU Peng, XIE Yu // Chinese scince Bulletin. – 2010. – Vol. 55.– № 2.– P. 114-119.
3. A.C.J. de Korte. Random packing of digitized particles / A.C.J. de Korte, H.J.H. Brouwers // Powder Technology. – 2013. – № 233. – P. 319-324.
4. Mizgulin V.V. Modeling dense material by spheropolyhedron packing methods / Mizgulin V.V., Kadushnikov R.M., Alievskiy D.M., Alievskiy V.M. // Kompyuternyye issledovaniya i modelirovaniye. – 2012. – T.4, № 4. – P. 757-766.
5. Stoyan Yu.G. Ф-function and its basic properties/ Yu.G. Stoyan // Doklady NAN Ukrainy. – 2001. – № 8. – P. 112-117.

***RESUME***

***V.V. Semkin, A.M. Chugay***

*Searching for Local Extrema of Non-Oriented Spherocones Dense Packing Problem*

In this paper a mathematical model of dense packing problem of non-oriented spherocones into a cuboid is constructed by using the Ф-function technic.

An application of Ф-functions allowed us to formulate mutual non-intersections conditions for a pair of objects as a set of inequalities systems which left sides are infinitely differentiable functions. Owing to this fact a mathematical model of the problem is presented as a classical non-linear programming problem.

For construction of starting points we proposed method which assumes that all objects metric characteristics are variable and take values from a minimum one to the initially specified.

In order to find local minima of the problem (1), (2) and local maxima of the problem (3), (4) we use the method of continuous improvement of the objective function values on a sequence of subregions that are formed by sets of inequalities systems of quasi Ф-functions for each pair of spherocones. The search of a local extremum in each subregion is performed by using IPOPT library.

*Статья поступила в редакцию 26.12.2013.*